ENSA - Kenitra

Contrôle Continu - S_4.

EX1. - Soit $p \in \mathbb{N}$ et f_p la fonction 2π-périodique telle que

$$f_p(t) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^{2p}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

1°) Calculer les Coefficients de Fourier de f_p ainsi que sa série de Fourier - Préciser la Convergence.

2°) En déduire les Valeurs de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et de

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

EX2. - Développer en série de Fourier la fct $t \mapsto f(t)$ avec $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t - \alpha}$ où $\alpha > 1$.

Ind. Poser $z = e^{it}$ et utiliser des développements en série entière Convenables.

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2011-2012
Semestre 4

Traitement de Signal

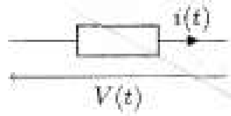
Examen

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.
Tout échange de matériel, de quelque nature que ce soit, est interdit.

Bon courage

Exercice 1

1. (a) On rappelle que l'équation fonctionnelle d'un composant électrique est la relation qui lie la d.d.p à ses bornes au courant le parcourant.



Ecrire les équations fonctionnelles des composants suivants:

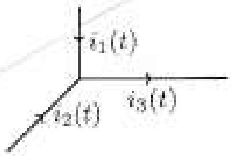
- Résistor de Résistance R.
- Un condensateur de capacité C.
- Bobine d'auto-induction L.

(b) On appelle:

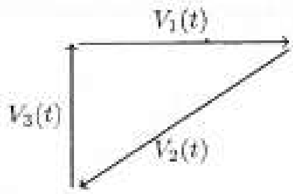
- Courant symbolique $I(p)$ et tension symbolique $V(p)$ les transformées de Laplace de $i(t)$ et de $v(t)$ respectivement.
- Impédance symbolique $Z(p)$ le rapport $\frac{V(p)}{I(p)}$ lorsque les conditions initiales sont nulles.

Déterminer les impédances symboliques des trois composants cités en 1a).

(c) Ecrire en symbolique les deux lois de Kirchoff ci dessous:



$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$



$V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) = 0$

(d) Déduire des questions précédentes que tous les théorèmes de l'électrocinétique des régimes continus (Théorème de superposition, Thévenin, Northon, Kennely, Millman, ...) se généralisent aux régimes quelconques à condition de remplacer tensions et courants par leurs transformées de Laplace et les éléments électriques par leurs impédances symboliques.

(e) **Application:** On considère le montage donné par la figure 1:
Le condensateur étant déchargé à l'instant $t = 0$ et on ferme l'interrupteur K.
Donner l'allure des variations de $V(t)$, ddp aux bornes du condensateur, en fonction du temps.

2. (a) Dans le cas où les conditions initiales ne sont pas nulles, donner un schéma symbolique équivalent des éléments bobine d'auto-induction et condensateur.

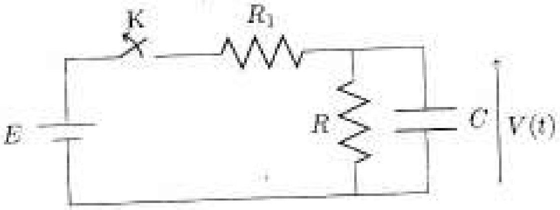
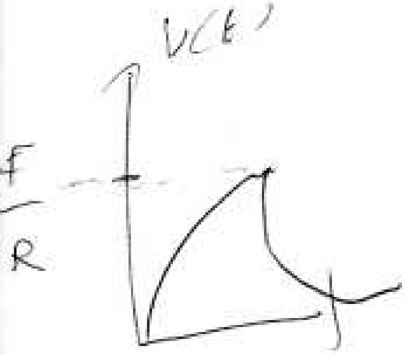
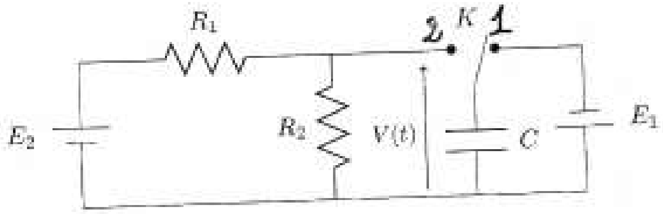


Figure 1:





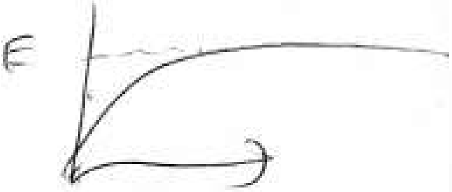


Figure 2:

(b) **Application:** On considère le montage donné par la figure 2; l'interrupteur K étant dans la position 1, on le bascule brusquement dans la position 2 à l'instant $t = 0$ choisi comme origine.
Tracer l'allure des variations de $V(t)$, ddp aux bornes du condensateur en fonction du temps.

3. (a) Soit un quadripôle quelconque. On suppose que les charges initiales des condensateurs et des courants

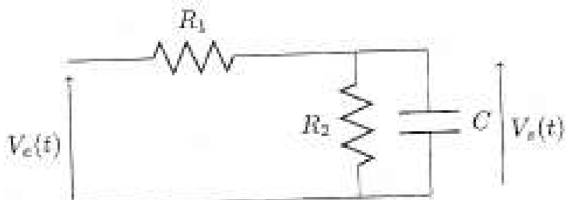
initiaux dans les bobines d'auto-induction du quadripôle sont nulles. On définit alors

- la fonction de transfert isomorphe: $T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$,
- la fonction de transfert cissoïdale: $T(j\omega)$,
- la réponse impulsionnelle $R(t)$: Tension de sortie lorsque la tension d'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$.
- la réponse indicielle $h(t)$: Tension de sortie lorsque la tension d'entrée est un échelon unité de Heaviside $H(t)$.

  Prouver que:

$$i)\ T(p) = \mathcal{L}(R(t)), \quad ii)\ h(t) = \int_0^t R(s)ds, \quad iii)\ T(j\omega) = \mathcal{F}(R(t))$$

- **Application:** Calculer la fonction de transfert isomorphe, la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle du montage suivant:



Remarque: La méthode des impédances symboliques est une méthode détournée de résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires couplées.

ENSA - Kenitra

Traitement de signal

Rattrapage - S_4

EX 1. — Résoudre pour $t > 0$ l'équation différentielle
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x(t) = e^{-2t},$$
en tenant compte des conditions initiales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

EX 2. — 1°) Prouver que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, e^{in\theta}$

ind. — On pourra commencer par montrer que
$$e^{\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, t^n, \quad t \neq 0, \; z \in \mathbb{C},$$
et poser $t = e^{i\theta}$

2°) exprimer $J_n(z)$ sous forme intégrale.

3°) En déduire les développements en série de Fourier des fonctions $\theta \longmapsto \cos(z\sin\theta)$, $\theta \longmapsto \sin(z\sin\theta)$, $\theta \longmapsto \cos(z\cos\theta)$, $\theta \longmapsto \sin(z\cos\theta)$ où z est considéré comme paramètre.